




Computer-Graphik II

Modelling beyond Polygons (and Raytracing them ...)

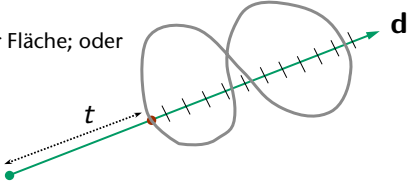


G. Zachmann
Clausthal University
cg.in.tu-clausthal.de

Schnitt Strahl – implizite Fläche

- Eine **implizite Fläche** ist die Menge $\{x \mid F(x) = 0\}$
- Strahl: $P(t) = O + t \cdot d$
- Einsetzen: $F(P(t)) = 0$
liefert Polynom in t vom Grad n
- Nullstellensuche:
 - Falls Grad < 5 : nach t auflösen
 - Sonst: Intervallschachtelung, Newton-Verfahren, ...
 - Startwerte:
 - Schnitt zwischen Strahl und BBox der Fläche; oder
 - Strahl innerhalb der BBox abtasten
- Z.B.: Kugel ...



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 2

Nullstellensuche mit Laguerre's Methode

- Vorteil: eine von wenigen "sure-fire"-Methoden
- Einschränkungen:
 - Klappt nur für Polynome
 - Algorithmus erfordert Arithmetik mit komplexen Zahlen, auch wenn alle Wurzeln reell sind (und damit auch alle Koeffizienten)
 - Sehr wenig theoretische Erkenntnisse zum Konvergenzverhalten
- Sehr viel empirische Hinweise, daß Algo (fast) **immer** zu einer Wurzel konvergiert, und zwar von (fast) **jedem** Startwert aus!
- Konvergenz-Ordnung ist 3, falls die Wurzel einfach ist

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 3

Motivation für den Algorithmus

- Gegeben (die x_i sind – evtl. komplexe – Wurzeln):

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (0)$$
- Beziehungen:

$$\ln |P(x)| = \ln |x - x_1| + \ln |x - x_2| + \dots + \ln |x - x_n|$$

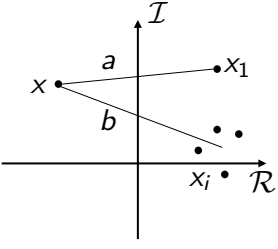
$$\frac{d}{dx} \ln |P(x)| = \frac{1}{x - x_1} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{P'(x)}{P(x)} =: G \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln |P(x)| = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \dots - \frac{1}{(x - x_n)^2}$$

$$= \frac{P''(x)}{P(x)} - \left(\frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 =: -H \quad (2)$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 4

- Sei x unsere aktuelle Näherung an Wurzel x_1
- Eine "drastische" Annahme:
 - Abstand $|x - x_1| = a$
 - Abstand zu allen anderen Wurzeln ist
$$|x - x_i| \approx b, \quad i = 2, 3, \dots, n$$
- Dann kann man (1) & (2) so darstellen



$$G \approx \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b} \quad (3)$$

$$H \approx \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2} \quad (4)$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12
Modelling 5

- Einsetzen ergibt Lösung für a :

$$a \approx \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}} \quad (5)$$

- VZ so wählen, daß $|a|$ minimal wird
- Wurzel kann negativ werden
→ a kann komplex werden
- Neue Näherung für x_1 ist

$$x_1 = x - a$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12
Modelling 6

Algorithmus

```

wähle  $x^{(0)}$ 
repeat
  berechne  $G = \frac{P'(x^{(k)})}{P(x^{(k)})}$ 

            $H = G^2 - \frac{P''(x^{(k)})}{P(x^{(k)})}$ 

  berechne  $a = \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}}$ 

  setze  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - a$ 
until  $a$  "klein genug" oder  $k \geq \max$ 

```

- Achtung: möglichst Code aus *Numerical Recipes* verwenden
 - Selbst implementieren ist fehlerträchtig
 - NR-Code hat eleganteres Abbruchkriterium
- Für Ray-Tracing: alle Nullstellen berechnen
 - Faktorisiere gefundene Nullstelle aus, wiederhole Laguerre n Mal

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 7

Instancing / Strahltransformation


- Kompliziertere (transformierte) Formen lassen sich oft reduzieren auf einfache (kanonische) Formen
- Idee: transformiere Strahl; führe Schnitt mit der einfachen Form durch; transformiere Schnittpunkt und -normale zurück
- Beispiel Ellipsoid:

berechne $P'(t) = \mathbf{M}^{-1}O + t\mathbf{M}^{-1}d$
 schneide $P'(t)$ mit Einheitskugel $\rightarrow P', \mathbf{n}', t'$
 $P := \mathbf{M} \cdot P'$; $\mathbf{n} := (\mathbf{M}^{-1})^T \cdot \mathbf{n}'$; $t := ?$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 9

Weiterer Grund für *Instancing*

- Speichereinsparung: nur mittels Instancing passen solch riesige Szenen komplett in den Speicher



61 unique plant models, 1.1M unique triangles, 300MB —
4000 plants in the scene, 19.5M triangles

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 11

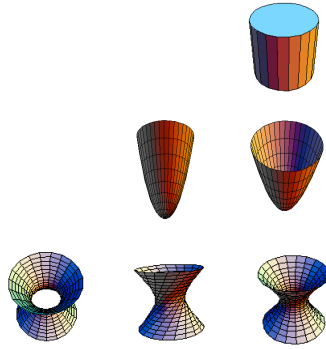
Die Quadriken (Kugel, Zylinder, Paraboloid, Hyperboloid)

- Mit diesen Techniken kann man viele weitere Objekte testen
 - Parametrische Liniengleichung in implizite Form des Objektes einsetzen
 - Ergibt Polynom in t vom Grad 2, 4, ...
 - Nullstellen für t bestimmen (analytisch, Newton, Laguerre, ...)
- Unendlicher Zylinder:

$$x^2 + y^2 = 1$$
- Paraboloid:

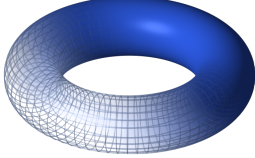
$$x^2 + y^2 - z = 0$$
- Hyperboloid (*one sheet*):









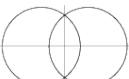
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

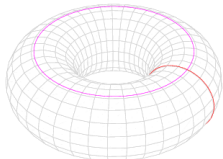


G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 12

■ Torus:

$$\left(c - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = a^2$$


	full view	cutaway	cross-section
ring torus			
horn torus			
spindle torus			



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 13

Superquadrics

■ Verallgemeinerungen der Quadriken

■ Super-Ellipsoid:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$$

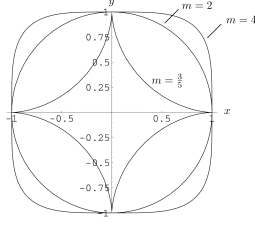
■ Super-Hyperboloid:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q - \left(\frac{z}{c}\right)^r = 1$$

■ Super-Toroid:

$$\left(d - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n\right)^q\right)^r + \left(\frac{z}{c}\right)^p = e^2$$

■ Achtung: hier ist immer $|x|^p$ gemeint!



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 14

Beispiele von Super-Quadrics

XScreenSaver demo "SuperQuadrics"
www.jwz.org/xscreensaver

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 15

Ratioquadrics [Blanc & Schlick, 1996]

- Variante der Superquadrics mit u.U. besseren Eigenschaften
- Idee der Superquadrics kann man auch so schreiben:

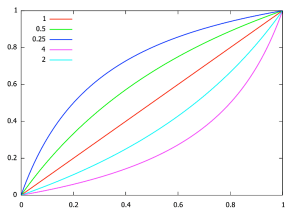
$$F(x, y, z) = f_p\left(\frac{x}{a}\right) + f_q\left(\frac{y}{b}\right) + f_r\left(\frac{z}{c}\right) - 1$$

$$f_p(x) = |x|^p$$
- Problem:
 - $f_p(x)$ ist an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar für $p \leq 1$
 - Dadurch entstehen für $p < 1$ "Spitzen", die möglicherweise unerwünscht sind
 - Außerdem ist $f_p(x)$ rel. teuer auszuwerten

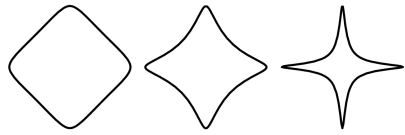
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 16

- Simple Idee: verwende einfach eine andere "Potenzfunktion"
- Die Pseudo-Potenzfunktion von Blanc & Schlick:

$$g_p(x) = \frac{x}{p + (1-p)x}$$



- Die Ratioquadratic für "Ratio-Ellipsoide" ist damit

$$F(x, y, z) = g_p\left(\frac{x}{a}\right) + g_q\left(\frac{y}{b}\right) + g_r\left(\frac{z}{c}\right) - 1$$
- Resultat:
 

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 17

Metaballs

- Abgeschaut von den Molekülen
- Idee: betrachte eine Kugel als Menge aller Punkte im Raum, die dasselbe "Potential" haben, wobei das Maximum des Potentialfeldes im Kugelmittelpunkt herrscht → **Isofläche**
- **Potentialfeld** wird beschrieben durch **Potentialfunktion**, z.B.

$$p(r) = \frac{1}{r^2}$$
 wobei

$$r = r_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|$$
- Die Kugelfläche ist damit

$$K = \{\mathbf{x} \mid p(\mathbf{x}) = \tau\}$$
 - τ heißt **Schwellwert** oder **Isowert**

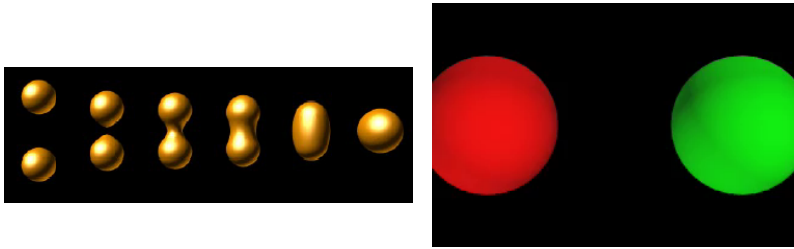
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 18

- Komplexere Objekte entstehen durch **Überlagerung (Blending)** der Potentialfelder mehrerer Punkte
 - Einfachstes Blending ist (gewichtete) Addition der Felder:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{r_i^2(\mathbf{x})}$$
 - Alle Punkte zusammen heißen **Skelett (skeleton)**,
 P ist das Gesamtpotential, die a_i (= "Feldstärke") bestimmen jew. Einfluß
 - Negative Feldstärken nehmen "Material" weg (z.B. für Löcher)
- Implizite Funktion setzt sich zusammen aus
Distanzfunktion + Potentialfunktion
- Entsprechend gibt es viele Varianten und Namen: "metaballs", "soft objects", "blobs", "blobby modeling", "implicit modeling" ...

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 19

- Allgemein ist also ein Metaball definiert als die Isosurface

$$\mathcal{F} = \{ P(\mathbf{x}) = \tau \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, P(\mathbf{x}) = \sum a_i p(d_i(\mathbf{x})) \}$$
 mit p = Potentialfunktion, d_i = Abstand zum i -ten Skelettpunkt
- Beispiel für 2 Skelett-Punkte:
 

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 20

▪ Andere Potentialfunktionen:

$$p_i(r) = e^{-br^2}$$

$$p(r) = \begin{cases} 1 - 3\frac{r^2}{b^2} & , r \leq \frac{1}{3}b \quad (*) \\ \frac{3}{2}(1 - \frac{r}{b})^2 & , \frac{1}{3}b \leq r \leq b \\ 0 & , r > b \end{cases}$$

$$p(r) = \begin{cases} \frac{r^4 - 2r^2 + 1}{1 + dr^2} & , r \leq 1 \\ 0 & , r > 1 \end{cases} \quad (**)$$

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 21

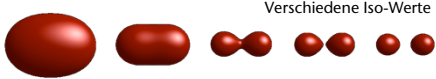
▪ Effekt der Variation des Parameters:

Potentialfkt ist (**), d für den linken Skelettpunkt fest, $d = 10 \dots 2000$ für den rechten Punkt

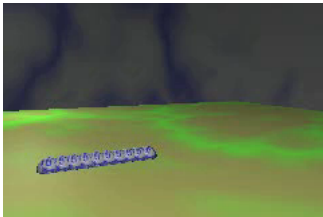
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 22

Deformationen

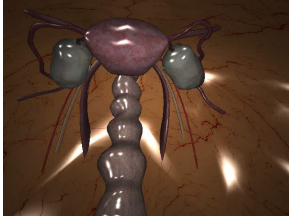
- Mit diesem Modell lassen sich Deformationen von "blob-artigen" Objekten sehr einfach modellieren:
 - Verschiebe Skelett-Punkte
 - Modifiziere Parameter a, b, \dots
 - Modifiziere den Iso-Wert t



Verschiedene Iso-Werte

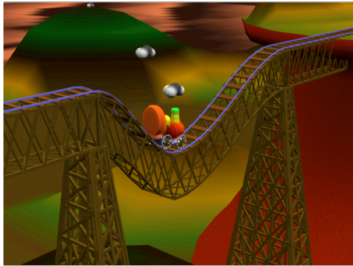


Brian Wyvill
<http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~blob/animations.html>

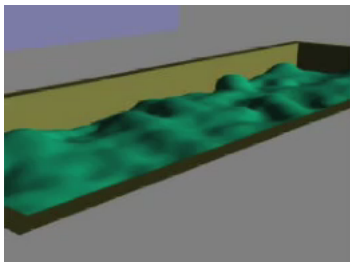


Frédéric Triquet
<http://www2.lifl.fr/~triquet/implicit/video/>

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12
Modelling 23





"The Great Train Rubbery" — Siggraph 1986



"Soft"

"The Wyvill Brothers"

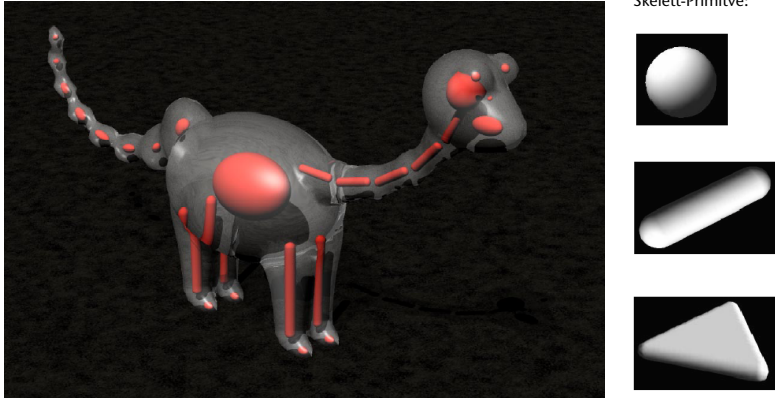
Geoff
Brian

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12
Modelling 24

Verallgemeinerungen / Varianten

- Punkte sind das einfachste Primitiv zur Konstruktion eines Skeletts; analog kann man Linien, Polygone, Ellipsoide, etc., verwenden:

Beispiele weiterer Skelett-Primitive:



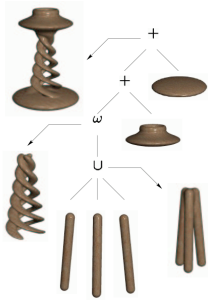
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 25

Andere Blending-Funktionen:

$$P_U(\mathbf{x}) = \max\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x})\}$$

$$P_\cap(\mathbf{x}) = \min\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x})\}$$

- Ein Baum von Blending-Operationen – der BlobTree:



G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 26

Bemerkungen zum "*implicit modeling*"

- Man kann nette Effekte recht einfach erzielen
- Als professionelles Tool in der Animationsindustrie oder im CAD hat es sich nicht durchgesetzt, weil einfach zu viel "Magie" im Spiel ist [sagt auch Geoff Wyvill]
- Brian Wyvill arbeitet immer noch an diesen Methoden [2004]

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 27

Die Normale an impliziten Flächen

- Normale in Punkt \mathbf{x} auf impliziter Fläche $f(\mathbf{x})$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

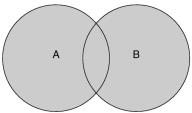
$$\approx \begin{pmatrix} f(x + \varepsilon, y, z) - f(\mathbf{x}) \\ f(x, y + \varepsilon, z) - f(\mathbf{x}) \\ f(x, y, z + \varepsilon) - f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} f(x + \varepsilon, y, z) - f(x - \varepsilon, y, z) \\ f(x, y + \varepsilon, z) - f(x, y - \varepsilon, z) \\ f(x, y, z + \varepsilon) - f(x, y, z - \varepsilon) \end{pmatrix}$$

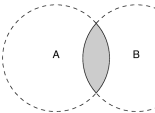
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 28

Weitere Objekt-Repräsentation: CSG

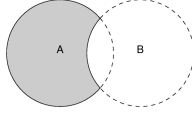
- Fügt sich genauso zwanglos ins Raytracing ein
- Zentrale Idee: konstruiere neue Objekte durch Mengen-Operationen auf einfachen Grund-Volumina
(→ *CSG = constructive solid geometry*)
 - Grund-Primitive: alle Objekte, die sich leicht (z.B. Implizit) beschreiben lassen
 - Mengen-Operationen: Schnittmenge, Vereinigung, Differenz
 - Rekursive Anwendung der Operationen → "Objekt-Arithmetik"




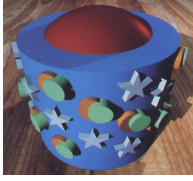
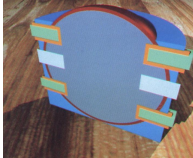
Vereinigung



Schnittmenge



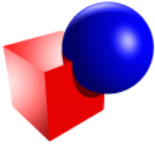
Differenz


G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12
Modelling 29

Beispiele


- Die drei Operationen auf Kugel und Würfel angewendet:



Vereinigung

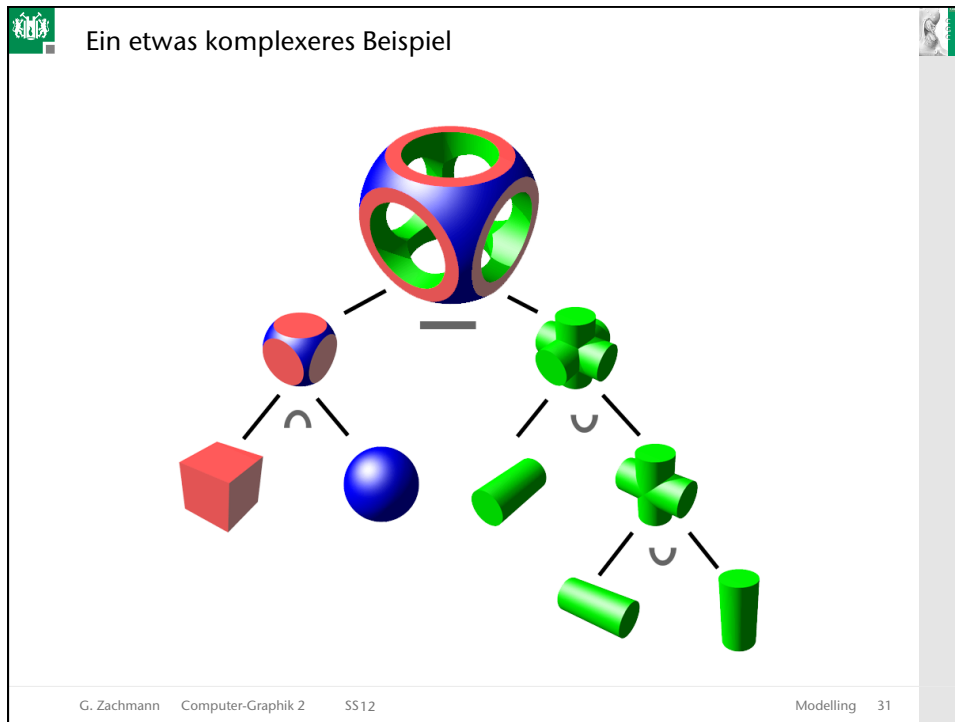


Differenz

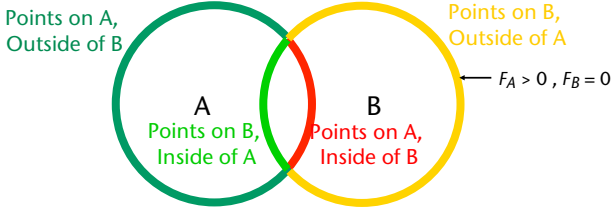
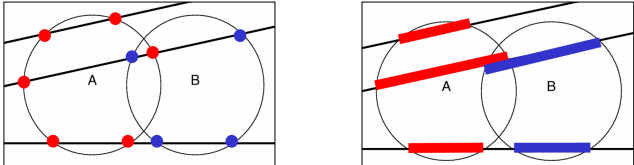


Schnitt

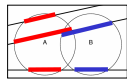
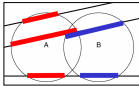
G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12
Modelling 30

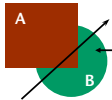


Raytracing von CSG-Objekten

- Verwende implizite oder explizite Form der Grund-Objekte:
 
- Bestimme **alle** Schnittpunkte eines Strahls mit allen Grundobj. en
 - Falls alle Grundobj. konvex \rightarrow 1 Intervall auf dem Strahl pro Grundobj.

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 33

- Führe die CSG-Operation auf den Intervallen durch
 
- Rekursiv den CSG-Baum nach oben
- Falls an der Wurzel ein leeres Intervall entsteht \rightarrow kein Schnitt
- Sonst: wähle das nächste aller Intervalle, die bis zur Wurzel übrigbleiben / entstanden sind
- Achtung:
 - Bei einer Operation können mehrere disjunkte Intervalle entstehen!
 

Bei Vereinigung entsteht hier ein Paar disjunkter Intervalle auf dem Strahl!
 - Dito hier bei der Differenz $B - A$!
 
- Achte auf numerische Stabilität (z.B.: lösche zu kleine Intervalle)

G. Zachmann Computer-Graphik 2 SS12 Modelling 34



Fraktale

- Auch Fraktale kann man trivial ray-tracen
 - Einfach Rekursion "on demand" bis zur gewünschten Tiefe
- Prozedural beschriebene Objekte

